

Stochastik-Übung 7 (Abgabe: 01.12.09)

1	2	3	4	Σ
3,5	4	4	3,5	15/16

1)

$A_1, \dots, A_n$ unabh. nach Def. 6.3.1 $\Leftrightarrow A_1$ unabh. von $A_2, \dots, A_n$;

A_n unabh. von $A_1, \dots, A_{n-1}$

" $\Leftarrow$ ": Seien $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ verschieden.

Nach Vor. ist A_{i_j} unabh. zu jedem $C_j \in \sigma((A_i)_{\substack{i=1, \dots, n \\ i \neq i_j}})$

Wähle $C_j = \bigcap_{k=i_j+1}^r A_{i_k}$

Dann gilt im ersten Schritt:

$$P(A_{i_1} \cap \underbrace{(A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r})}_{C_1}) = P(A_{i_1}) \cdot P(C_1) \quad \checkmark$$

Im j -ten Schritt:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j} \cap \underbrace{(A_{i_{j+1}} \cap \dots \cap A_{i_r})}_{C_j}) \\ = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_j}) \cdot P(C_j)$$

Zuletzt ist dann $C_{r-1} = A_{i_r}$ und es gilt

$$P\left(\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^r P(A_{i_j}) \Rightarrow \text{Def. 6.3.1} \quad \checkmark$$

" $\Rightarrow$ ": z.z.: A_i unabh. zu $C_i \in \sigma(A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n)$ beliebig,

also $P(A_i \cap C_i) = P(A_i) \cdot P(C_i)$

C_i kann also beliebiges ^{als} Schnitt, Vereinigung oder Komplement aus Elementen der ev. σ -Algebra sein.

Für Schnitte folgt die Gleichheit sofort aus der Voraussetzung (6.3.1).

Da alles andere damit umgeschrieben werden kann,

genügt es noch $C_i = \Omega \setminus A_k$ ($k \neq i$) und $C_i = A_k \cup A_l$ ($k, l \neq i$)



zu betrachten. Wichtig ist hierfür häufig

$$(*) P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \quad (\text{S. 14})$$

Komplement:

$$P(A_i \cap (\Omega \setminus A_k))^* = P(A_i) + P(\Omega \setminus A_k) - P(A_i \cup (\Omega \setminus A_k))$$
$$= P(A_i) + P(\Omega \setminus A_k) - P(\Omega \setminus (A_k \setminus A_i))$$

gegen-W.

$$= P(A_i) + 1 - P(A_k) - 1 + P(A_k \setminus A_i)$$

disj. Verein.

$$= P(A_i \cup (A_k \setminus A_i)) - P(A_k)$$

$$= P(A_i \cup A_k) - P(A_k)$$

$$= P(A_i) - P(A_i \cap A_k)$$

A_i, A_k unabh.

$$= P(A_i) \cdot (1 - P(A_k))$$

gegen-W

$$= P(A_i) \cdot P(\Omega \setminus A_k)$$

Vereinigung:

$$P(A_i \cap (A_k \cup A_l)) = P((A_i \cap A_k) \cup (A_i \cap A_l))$$

$$= P(A_i \cap A_k) + P(A_i \cap A_l) - P(A_i \cap A_k \cap A_l)$$

A_i, A_k, A_l unabh.

$$= P(A_i) \cdot (P(A_k) + P(A_l) - P(A_k) \cdot P(A_l))$$

$$= P(A_i) \cdot P(A_k \cup A_l)$$

(✓)

3,5/4

Also geht alles.

2) ~~Wähle~~ Wähle $2^{k-1}-1$

$$A_k = \bigcup_{i=0}^{2^{k-1}-1} \left[\frac{2i}{2^k}, \frac{2i+1}{2^k} \right]$$

✓

Mit dieser Konstruktion ist Bed. 1 erfüllt (endl. Vereinigung von Teilintervallen).

Wg. disjunkter Vereinigung gilt

$$P(A_k) = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} P\left(\left[\frac{2i}{2^k}, \frac{2i+1}{2^k}\right]\right) = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \left(\frac{2i+1-2i}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \frac{1}{2^k} \cdot 1 = \frac{1}{2^k} (2^{k-1}) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \in]0,1[$$

Also 2. Bed. erfüllt

✓

zu 2) Nach Konstruktion bleibt beim Schneiden der $A_1, \dots, A_n$ nur das erste Teilintervall von A_n übrig. Außerdem wurde gerade ausgerechnet, dass die Einzelwahrscheinlichkeit von jedem A_i immer $\frac{1}{2}$ beträgt. Also

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P\left[\left[0, \frac{1}{2^n}\right]\right] = \frac{1}{2^n} - 0 = \frac{1}{2^n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{n \text{ mal}}$$

$$= P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad \checkmark$$

gut! 4/4

3) X, Y, Z unabh., d. h. für beliebige $[c_i, d_i]$ sind die Mengen $\{\omega \mid X(\omega) \in [c_1, d_1]\}$, $\{\omega \mid Y(\omega) \in [c_2, d_2]\}$ und $\{\omega \mid Z(\omega) \in [c_3, d_3]\}$ unabh.

Fall $\alpha_0 \neq 0$:

Betrachte $\{\omega \mid (\alpha_0 X + \alpha)(\omega) \in [c_1, d_1]\}$

Ist aber äquivalent zu

$$\{\omega \mid X(\omega) \in \left[\frac{1}{\alpha_0}(c_1 - \alpha), \frac{1}{\alpha_0}(d_1 - \alpha)\right]\}$$

Für Y, Z analog. Da die $[c_i, d_i]$ beliebig, sind auch diese Intervalle mgl. Also auch diese ZV unabh. $\checkmark$

Fall $\alpha_0 = 0$:

Dann ist die Menge

$$A_{i_1} = \{\omega \mid \alpha \in [c_1, d_1]\} = \begin{cases} \Omega & \text{falls erfüllt} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\underline{A_{i_1} = \Omega}: P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n})$$

$$P(\Omega) = 1$$

Also kein Einfluss.

$$\underline{A_{i_1} = \emptyset}: P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(\emptyset) = 0$$

Also beide Seiten Null $\Rightarrow$ unabh. $\checkmark$

hier sind nur 2 Mengen zu betrachten:
 $\{\omega \mid Y(\omega) \in [c_2, d_2]\}, \{\omega \mid Z(\omega) \in [c_3, d_3]\}$

4/4

4) Wie auf S. 40^{1/2} muss gezeigt werden, dass

$$\{Y \geq a\} \in \mathcal{E} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

$$\{Y \geq a\} = \{\omega \mid Y(\omega) \geq a\}$$

$$= \{\omega \mid \max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \geq a\}$$

$$= \{\omega \mid X_1(\omega) \geq a \vee \dots \vee X_n(\omega) \geq a\}$$

$$= \{\omega \mid X_1(\omega) \geq a\} \cup \dots \cup \{\omega \mid X_n(\omega) \geq a\}$$

Alle X_i sind ZV, also ist analog zu dem schon

Gezeigten (Permanenzeigenschaften) auch Y ZV (genau?)

$$F_Y(x) = P(\{\omega \mid Y(\omega) \leq x\})$$

$$= P(\{\omega \mid X_1(\omega) \leq x \wedge \dots \wedge X_n(\omega) \leq x\})$$

$$= P(\{X_1 \leq x\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x\})$$

$$= P(\{X_1 \leq x\}) \cdot \dots \cdot P(\{X_n \leq x\})$$

$$= F_{X_1}(x) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x)$$

X_i
alle unabh.

b)

$$F_Y(x) = \left(\int_0^x 2 - 2A \, dA \right)^n$$

$$= \left([2A - A^2]_0^x \right)^n$$

$$= (2x - x^2)^n$$

g sei Dichte von P_Y . Nach Hinweis:

$$g(x) = F_Y'(x)$$

$$g(x) = n \cdot (2x - x^2)^{n-1} \cdot (2 - 2x)$$

-0,5

f, Rechnung richtig

3, 5/4